# Varianta 48

**Subiectul I.**

**a)** $|\vec{v}| = 5$.

**b)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

**c)** $(x+1)^2 + (y-1)^2 - \dfrac{1}{2} = 0$.

**d)** Aria triunghiului $LMN$ este $S = 1$.

**e)** $BC = \sqrt{7}$ .

**f)** $a = b = 1$, $c = -6$.

**Subiectul II.**

**1.**

**a)** $a_7 = 1$.

**b)** Probabilitatea căutată este $p = \dfrac{1}{3}$.

**c)** 32.

**d)** $x = 1$.

**e)** 26.

**2.**

**a)** $f'(x) = -\dfrac{1}{x(x+1)}$, $\forall\, x > 0$.

**b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(1) + f(2) + \ldots + f(n)\right) = +\infty$

**c)** $f''(x) > 0$, $\forall\, x > 0$, deci funcția $f$ este convexă pe $(0, \infty)$.

**d)** Se arată că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ şi $f$ este strict descrescătoare şi continuă pe $(0, \infty)$, deci $f$ este bijectivă.

**e)** $\displaystyle\int_0^1 \ln(x+1)\,dx = 2\cdot\ln 2 - 1$.

**Subiectul III.**

**a)** $S_1 = 0$ iar $S_2 = -2a$.

**b)** $x_k$ rădăcină a lui $f$ $\Leftrightarrow$ $x_k^3 = -ax_k - b$ $\Rightarrow$ $x_k^{n+3} = -a\cdot x_k^{n+1} - b\cdot x_k^n$, $\forall\, k \in \{1, 2, 3\}$ şi adunând egalitățile rezultă $S_{n+3} + aS_{n+1} + bS_n = 0$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

**c)** $S_3 - 3b$ şi $S_4 = 2a^2$.

**d)** Se verifică prin calcul direct.

**e)** Din **d)** obținem $\Delta = -4a^3 - 27b^2$.

**f)** Considerăm $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$. Atunci $\det(A) \in \mathbf{R}$, deci $(\det(A))^2 \geq 0$.

Mai mult, $\Delta = \det(A \cdot A^T) = \det(A) \cdot \det(A^T) = (\det(A))^2 \geq 0$.

**g)** Avem $\det(A) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$, deci

$$\Delta = (\det(A))^2 = ((x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2))^2 \overset{ip}{\geq} 0 \qquad (1)$$

Dacă $f$ nu are toate rădăcinile reale, acestea sunt de forma $\begin{cases} x_1 = -2c \\ x_2 = c + d \cdot i \\ x_3 = c - d \cdot i \end{cases}$, cu

$c, d \in \mathbf{R}$, $d \neq 0$.

Atunci, (1) $\Leftrightarrow$ $(3c + d \cdot i)^2 (3c - d \cdot i)^2 (-2d \cdot i)^2 = -4d^2 (9c^2 + d^2)^2 \geq 0$, fals.

**Subiectul IV.**

**a)** Pentru $k \in \mathbf{N}^*$, $\int_0^{2\pi} \cos kx \, dx = 0$.

**b)** $I_2 = 0$.

**c)** Pentru $n = 5$, în mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ sunt 3 numere impare, deci indiferent de semnele pe care le alegem în fața numerelor 1, 2, 3, 4, 5, vom obține un număr impar. Se raționează la fel pentru $n = 6$.

**d)** „$\Rightarrow$” E posibil să existe o alegere a semnelor în suma $\pm 1 \pm 2 \pm \ldots \pm n$ astfel încât să obținem numărul 0, doar dacă în mulțimea $\{1, 2, \ldots, n\}$ există un număr par de numere impare, adică dacă $n \in \mathbf{N}^*$ este un număr de forma $4k$ sau $4k + 3$.

„$\Leftarrow$” Dacă $n = 4k$, o combinație potrivită de semne este:

$(1 - 2 - 3 + 4) + (5 - 6 - 7 + 8) + \ldots + ((4k - 3) - (4k - 2) - (4k - 1) + (4k)) = 0$

iar dacă $n = 4k + 3$, o combinație potrivită de semne este:

$(1 + 2 - 3) + (4 - 5 - 6 + 7) + \ldots + ((4k) - (4k + 1) - (4k + 2) + (4k + 3)) = 0$.

**e)** Se demonstrează prin inducție că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$,

$$2^n \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \ldots \cdot \cos nx = \sum \cos(\pm 1 \pm 2 \pm \ldots \pm n)x \qquad (1)$$

în suma anterioară apărând toate combinațiile posibile ale semnelor.

Atunci $2^n \cdot I_n = \sum \int_0^{2\pi} \cos(\pm 1 \pm 2 \pm \ldots \pm n)x \, dx$.

Dacă $n = 4k + 1$ sau $n = 4k + 2$, folosind **d)** și **a)** deducem că $I_n = 0$.

Dacă $n = 4k$ sau $n = 4k + 3$, membrul drept este o sumă de integrale dintre care unele sunt egale cu 0, iar altele sunt egale cu $\int_0^{2\pi} 1 \, dx = 2\pi$, aşadar $I_n \neq 0$.

**f)** Pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, $\left|\frac{I_n}{n}\right| \le \frac{\int_0^{2\pi} 1\,dx}{n} = \frac{2\pi}{n}$, aşadar $\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{n} = 0$.

**g)** Pentru $p \in \mathbf{N}^*$, obținem $a_{4p} = a_{4p+1} = a_{4p+2} = 2p$ şi $a_{4p+3} = 2p+1$.

Cum $\lim_{p\to\infty} \frac{a_{4p}}{4p} = \lim_{p\to\infty} \frac{a_{4p+1}}{4p+1} = \lim_{p\to\infty} \frac{a_{4p+2}}{4p+2} = \lim_{p\to\infty} \frac{a_{4p+3}}{4p+3} = \frac{1}{2}$, rezultă că $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{1}{2}$.